En poetik af vinkler og drømme

Af Catherine Asaro

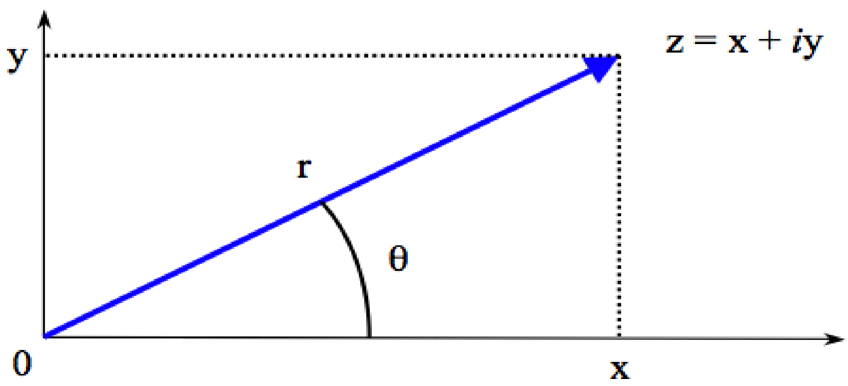
Fantasiens rum
Første gang jeg hørte om Riemann-overflader, blev jeg forelsket i emnet. Det var under et kursus i anvendt matematik for studerende med hovedfag i fysik, som jeg tog da jeg læste til bachelor. Kurset intimiderede mig, men det virkede også spændende, så jeg gav det en chance. I elskede det kursus. Endnu i dag er anvendt matematik mit yndlingsfag. Giv mig en ligning at løse, så er jeg glad. Denne essay beskriver nogle af de måder, jeg har brugt matematik i mine historier. Jeg lægger ud med nogle ligninger for dem der kan lide den slags, men det er ikke nødvendigt for at følge med i artiklen. Jeg har også inkluderet analogier og billeder, som jeg håber vil belyse de smukke begreber bag matematikken. Min introduktion til Riemann-flader fandt sted i det hedengangne matematikkursus da vi studerede emnet kompleks analyse. Det handler om komplekse tal, et emne kendt af studerende i alle aldre, fra folkeskoleelever der første gang hører om imaginære tal til doktorkanditater der studerer teoretisk fysik. Så hvad er et komplekst tal? Vi kan kalde det z, hvor

$$z = x + iy$$

Her er x og y reelle tal; det vil sige tal som 42, 3,64, 84/7 eller π. Men i er en helt anden størrelse; det er et imaginært tal, nærmere bestemt kvadratroden af -1:

$$i = \sqrt{-1}$$

Så z har en 'virkelig del' lig med x og en 'imaginær del' lig med iy. Hvis vi plotter z på en graf i x-y-planet, er punktet $(x, y) = z$ det imaginære tal.



Figur 1: Spidsen af pilen angiver det komplekse tal $z = x + iy$,
hvor x r den reelle del og iy er den imaginære del.

Vi kan også repræsentere z med *polære koordinater*. Positionen er igen angivet af to tal, men i dette tilfælde er tallene r og θ. Linjen trukket fra nulpunktet til z har længde r, og vinklen linjen laver med x-aksen er θ. Der er en sammenhæng mellem polære og x-y koordinater, $x = r \cos \theta$, og $y = r \sin \theta$. Så

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

Hvor $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ er den komplekse *eksponentielle funktion*, som dukker op i mange fysiktimer, hvor den har gjort livet besværligt for generationer af unge vordende forskere.

Længden af r betyder ikke noget for de nærværende diskussioner, så for at gøre livet nemmere, sætter jeg $r = 1$. Vinklen θ kan stadig variere. Faktisk, hvis vi lader den vokse fra 0 til 2π, vil punktet z rotere hele vejen rundt om planet og komme tilbage hvor det startede; det vil lave en cirkel i x-y-planet.

Forestil dig at linjen fra nulpunktet til z er den lille viser på et ur med z i spidsen. Når viseren bevæger sig en gang rundt på urskiven, svarer det til at θ bevæger sig gennem en vinkel på 2π. Efter tolv timer, midnat til middag, er viseren tilbage hvor den startede. Gå rundt en gang mere, og tiden går fra middag til midnat. Timerne i den første omgang har samme tal som i anden omgang, men henviser til andre tidspunkter. Tredje gang rundt er vi dog tilbage til morgentimerne.

Konventionen i matematik er dog at $\theta = 0$ når z er på x-aksen, svarende til at urviseren står på klokken 3. desuden stiger θ når z går rundt mod urets retning. Hvis z bevæger sig rundt med uret, falder θ fra 0 til -2π. Diskussionen er dog grundlæggende den samme uanset om vi har et minus foran vinklen eller ej. Og vi kan lige så godt gå fra klokken 3 om morgenen til 3 eftermiddag som fra midnat til middag. Så z er et ur. På en måde. Ved første øjekast har det ikke meget at gøre med fiktion. Men der sker noget forbløffende når vi tager kvadratroden. Så får vi

$$\sqrt{z} = z^{1/2} = e^{i\theta/2} = \cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)$$

Hvad sker der hvis 'urviseren' bevæger sig med uret? Når θ går hele vejen rundt om uret, går $\sqrt{z}$ kun halvvejs rundt fordi det afhænger af $\theta/2$. For at se hvad det betyder, kaster vi et blik på $\theta = -\pi$, som svarer til klokken 9. For den vinkel får vi at

$$\sqrt{z} = \cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2) = -i$$

Hvis vi så fortsætter rundt om uret og ender hvor vi startede, ændrer det θ med -2π, og så vil vi være ved $\theta = -3\pi$, siden vi begyndte ved $\theta = -\pi$. Det er også klokken 9. Så hvis $\sqrt{z}$ opfører sig pænt, vil den have samme værdi ved -3π som den gjorde ved $-\pi$. Men i stedet får vi

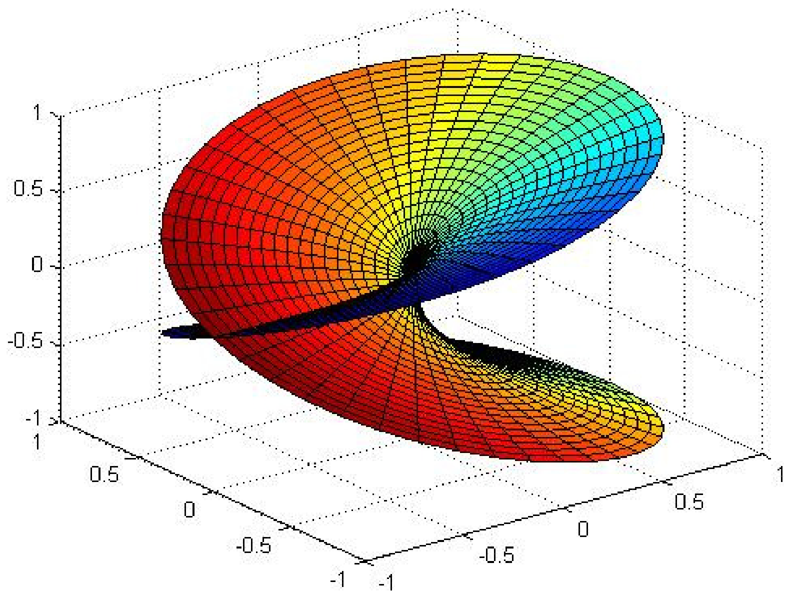
$$\sqrt{z} = \cos(-3\pi/2) + i \sin(-3\pi/2) = i$$

Kvadratroden har forskellige værdier for $-\pi$ og -3π selvom de er på præcis det samme sted, det samme 'klokkeslet'. Så er $\sqrt{z} = i$ eller $-i$? Det er tvetydigt. Det er derfor at funktioner med dobbelt værdi ikke er tilladte; z må have en unik værdi i hvert punkt for at blive anerkendt som en valid funktion.

Det kan være du spekulerer på hvad der sker hvis vi kører rundt en tredje gang. Har $\sqrt{z}$ tre værdier? Fire værdier? Hvor stopper det? Det viser sig at den tredje gang rundt bliver $\sqrt{z} = -i$ igen, og en fjerde gang rundt giver os $\sqrt{z} = i$. Så $\sqrt{z}$ skifter mellem kun to værdier. Desværre er bare to for mange. I vores univers kræver matematikken, der beskriver fysikken, størrelser med kun én værdi. Det giver utvetydige resultater; ellers ville vi ikke vide hvilket tal, vi skulle bruge. Men størrelser som $\sqrt{z}$ dukker hele tiden op i formler i fysik. Så det ser ud til at vi sidder fast.

Løsningen på problemet er en elegant idé udviklet af matematikeren Bernhard Riemann i det nittende århundrede. I stedet for at have et enkelt x-y-plan, foreslog han at sætte to oven på hinanden. Det øverste plan eller 'lag' er til punkter hvor z har den ene værdi; det nederste er til den anden værdi. For at komme fra det ene lag til det andet, skærer vi dem om fra nulpunktet ud til uendeligheden. Det kaldes et *forgreningssnit*. Vi forbinder lagene ved at forbinde deres forgreningssnit. Så kan vi gå rundt omkring det øverste lag en gang og smutte ned til det nederste for andet gennemløb. Og så tilbage til det øverste lag. Det gør det muligt for $\sqrt{z}$ at have én værdi på det øverste lag og en anden værdi på det nederste.

Voila! Funktionen har ikke længere to værdier. Tvetydigheden forsvinder så længe vi ved hvilket lag vi er på. Det svarer til at lægge to ure oven på hinanden. Timeviseren går rundt fra 3 morgen til 3 eftermiddag på det øverste ur og smutter så gennem forgreningssnittet og løber rundt på det nederste ur fra 3 eftermiddag til 3 morgen. Og så tilbage til det øverste ur.



Figur 2. Riemann-flader for $\sqrt{z}$. Figuren viser krumme flader, som ikke ligner ure ret meget, men lagene kan også plottes så de ser fladere ud, mere som skiver.

Kvadratroden af z er den enkleste form for Riemann-flader. Hvis vi har en kubikrod, får vi brug for tre lag, fjerde rod kræver fire lag, og så videre for mere komplicerede funktioner. Men den grundlæggende idé er den samme: lagene skaber alternative versioner af det komplekse plan.

Som studerende var jeg fascineret af al denne matematik; som science fiction-forfatter var jeg begejstret. Sikke en fantastisk måde til at beskrive alternative universer! Læg dem på forskellige Riemann-lag. I min novelle "The Spacetime Pool" falder hovedpersonen Janelle gennem et forgreningssnit der kaster hende ind i en alternativ virkelighed. I romanen *Catch the Lightning* bliver jagerpiloten Althor kastet gennem en flænge i hans univers' Riemann-flade da hans skib bliver saboteret.

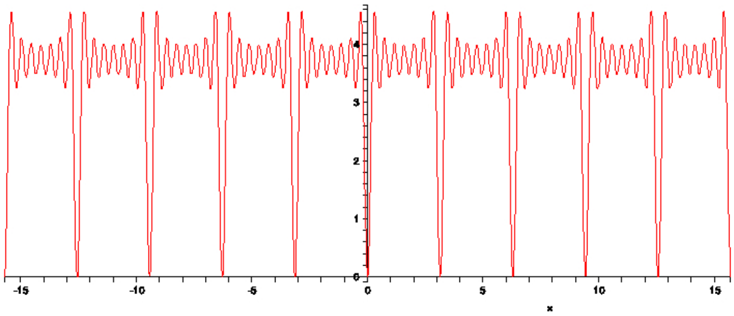
Kimen til disse ideer i mine historier går tilbage til dengang jeg prøvede at finde en fiktiv hurtigere-end-lyset-motor der i det mindste var matematisk plausibel. Jeg regnede ud at hvis hastigheden bliver gjort kompleks i ligningerne fra den specielle relativitetsteori, ville problemerne med lysets hastighed forsvinde. Det er selvfølgelig en matematisk leg; vi kender ikke til nogen fysisk måde til at gøre hastighed kompleks. Men matematikken er nydelig, så jeg skrev en afhandling om den til *The American Journal of Physics* kaldet "Complex Speeds and Special Relativity", og den blev trykt i årgang 64, april-nummeret 1996.

Den specielle relativitetsteori udviklet af Einstein beskriver hvad der sker hvis vi rejser tæt på lysets hastighed. Det involverer en funktion kaldet 'gamma', der afhænger af en kvadratrod som involveret hastigheden v. Hvis v er kompleks, kommer Riemann-lag ind i billedet. Mindst to ville være påkrævet, sandsynligvis flere, måske endda et uendeligt antal! Når v er kompleks, forudsiger teorien også andre fantastisk underlige effekter. Jeg har brugt ideer på det grundlag i mange historier, inklusive *Primary Inversions*, min først udgivne roman, og novellen "Lys og skygge" i denne samling. Det har været fascinerende at lege med sådanne fiktive ekstrapolationer af matematikken.

En harmoni af hvælvinger
"The Spacetime Pool" trækker også på en af mine yndlingsemner, Fourier-analyse. Jeg forestillede mig Fouriersalen i historien som et enormt rum fyldt med hvælvinger. Ideen voksede frem af min research for en anden bog, *The Veiled Web*, som foregår i Marokko. Mens jeg lavede min research, blev jeg forelsket i den vidunderlige arkitektur fra Spansk Andalusien og Nordafrika. Jeg tilbragte timer med at læse bøger fyldt med glittede farvefotos af disse udsøgte bygninger. Jeg blev også fanget af hvordan hvælvingerne gentog sig, som i moské-katedralen nedenfor:

Figur 3: Mezquita de Córdoba, eller Den Store Katedral i Cordoba,
nu kendt som Catedral de Nuestra Señora de la Asunción

Fourier-analyse bliver brugt til at modellere periodiske funktioner, så jeg spekulerede på om det ville virke for hvælvingerne. Først havde jeg brug for en ligning der lignede arkitekturen. Jeg endte med en ret god tilnærmelse ved at summere en serie af kvadrerede sinusfunktioner som disse:

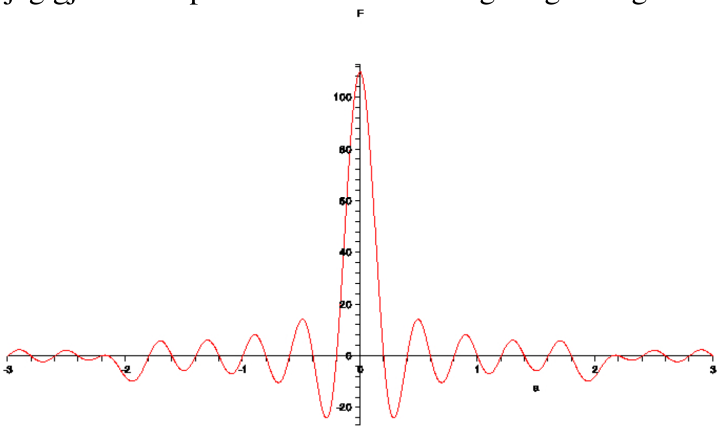


Figur 4: Matematisk model af mauriske hvælvinger lavet ved at summere sinusfunktioner

Fourier-metoder kan analysere et signal der gentager sig i tid, for eksempel vekselstrøm med 60 svingninger i sekundet. Hvis vi laver en Fournier-transformation af signalet, får vi en ny funktion der afhænger af frekvens i stedet for tid. Denne nye funktion opfanger hvilke frekvenser der bidrager til signalet. For eksempel vil transformationen for vekselstrømmen blive til en enkelt linje ved 60 svingninger i sekundet. De fleste funktioner er ikke så enkle; mere end én frekvens bidrager til deres form.

At dekonstruere en funktion til frekvenser er som at dele en musikalsk akkord op i dens individuelle toner. Hver tone har en særlig frekvens, og tilsammen skaber de den harmoniske lyd vi kalder en akkord. På samme måde dekonstruerer en Fourier-transformation en funktion til individuelle dele, der hver oscillerer med forskellige frekvenser.

Vi kan også lave transformationen baglæns, det vil sige lave en funktion der afhænger af frekvens om til en der afhænger af tid. I “The Spacetime Pool” transformerer Janelle hvælvingerne i Fouriersalen ind i tidsdomænet. Jeg var nysgerrig efter at se hvad der faktisk ville ske med den transformation, så jeg gjorde det på mine sinus-hvælvinger og fik figuren nedenfor:



Figur 5: Fourier-transformation af matematisk model for mauriske hvælvinger

Den store spids angiver et tidspunkt der dominerer resten af funktionen. Spørgsmålet med hensyn til historien var så, hvad betyder dette tidspunkt? “The Spacetime Pool” er faktisk den første tredjedel af en bog jeg er ved at skrive med omdrejningspunkt i de hemmeligheder der er gemt i den gådefulde Fouriersal. I novellen i denne samling har Janelle mange puslespil hun skal løse, og nogle af dem bliver ikke helt afklaret. De sidste to tredjedele af bogen vil afsløre resten af hemmelighederne.

I kortromanen “Aurora in Four Voices” bruger Fournier-Fontænen individuelle springvand til at efterligne frekvensleddene i en Fournier-serie. Hver farve lys der bader Fontænen har en specifik frekvens der svarer til et af springvandene. Når alle disse yndefulde vandhvælvinger bliver tændt på én gang, skaber de en periodisk bølge badet i en glitrende regnbue af lys. Selvfølgelig kan springvand ikke opføre sig præcis som en sum af Fournier-led, men jeg syntes at det ville komme tæt nok på til at skabe et smukt resultat. Jeg har altid spekuleret på hvordan det ville se ud.

Det at bruge ideer fra matematik i min fiktion er en del af skrivearbejdet som jeg finder særligt tilfredsstillende. Det tillader mig at blande to af mine yndlingsemner – matematik og det at skrive – og skabe noget nyt.

Oversat af Klaus Æ. Mogensen.

Artiklen er skrevet til bogen ”Lys og Skygge” som vil udkomme på forlaget Ny Science Fiction i efteråret 2010.

Illustrationerne er lavet af forfatteren, bortset fra figur 2 og 3, der er taget fra Wikimedia Commons (Riemann_sqrt.jpg, Mosque_of_Cordoba_Spain.jpg).